Introduction à la théorie des sondages - Cours 1

Thomas Merly-Alpa
thomas.merly-alpa@insee.fr

INSEE, département des méthodes statistiques

15 janvier 2018

Organisation

- 8 cours, 4 TD en demi-groupes
- 1/3 de la note : devoir maison à rendre **le 5 mars**
- 2/3 de la note : examen final le 19 mars
- 2 intervenants :
  - Thomas Merly-Alpa - `thomas.merly-alpa@insee.fr`
  - Martin Chevalier - `martin.chevalier@insee.fr`
- Les slides et TD du cours sont à l'adresse `http://nc233.com/teaching`

Sommaire I

Sommaire II

Chapitre 1

Pourquoi le sondage ?

Partie 1

Concept

Concept

Qu'est-ce que l'échantillonnage / l'estimation par sondage ?

- Une population de grande taille
- Compter ou interroger est coûteux
- On sélectionne quelques individus qui répondent "pour tout le monde"

Idée cruciale : sélectionner **aléatoirement** ces individus.

Historique

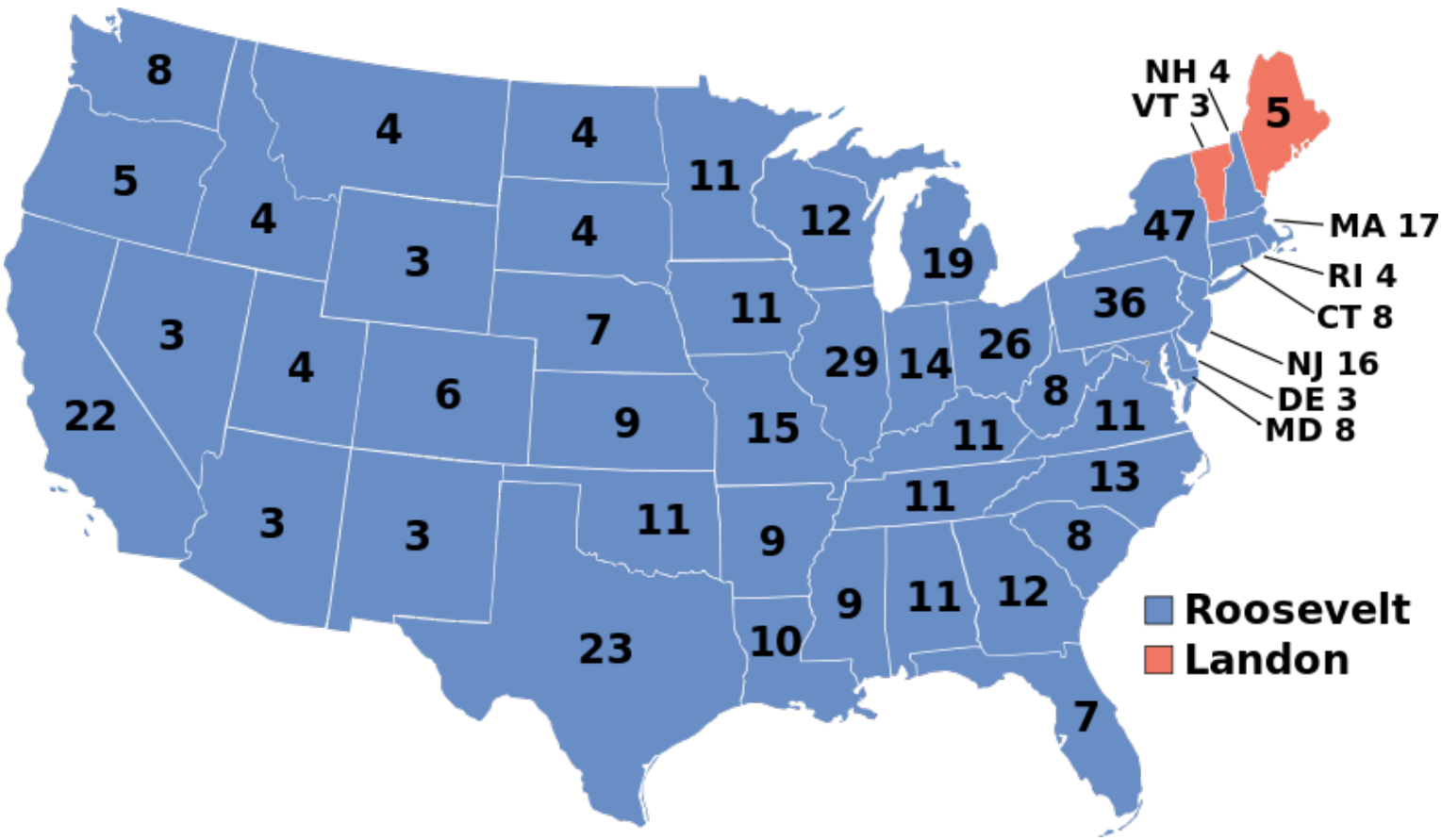
Historiquement et conceptuellement, rien d'évident !

- Laplace (1785) : recensement par une sous-partie de la population
- Kiaer (1895) : échantillon "représentatif"
  ... puis 1925 : acceptation de l'échantillonnage aléatoire
- Gallup (1936) : élections américaines

Élections américaines de 1936

- Duel entre Alfred Landon (Républicain) et Franklin Roosevelt (Démocrate)
- Un magazine interroge ses 2 millions de lecteurs : victoire de Landon
- Gallup fait un sondage sur 50 000 personnes : il prédit la victoire de Roosevelt

Élections américaines de 1936



Jusqu'en 2016 ?

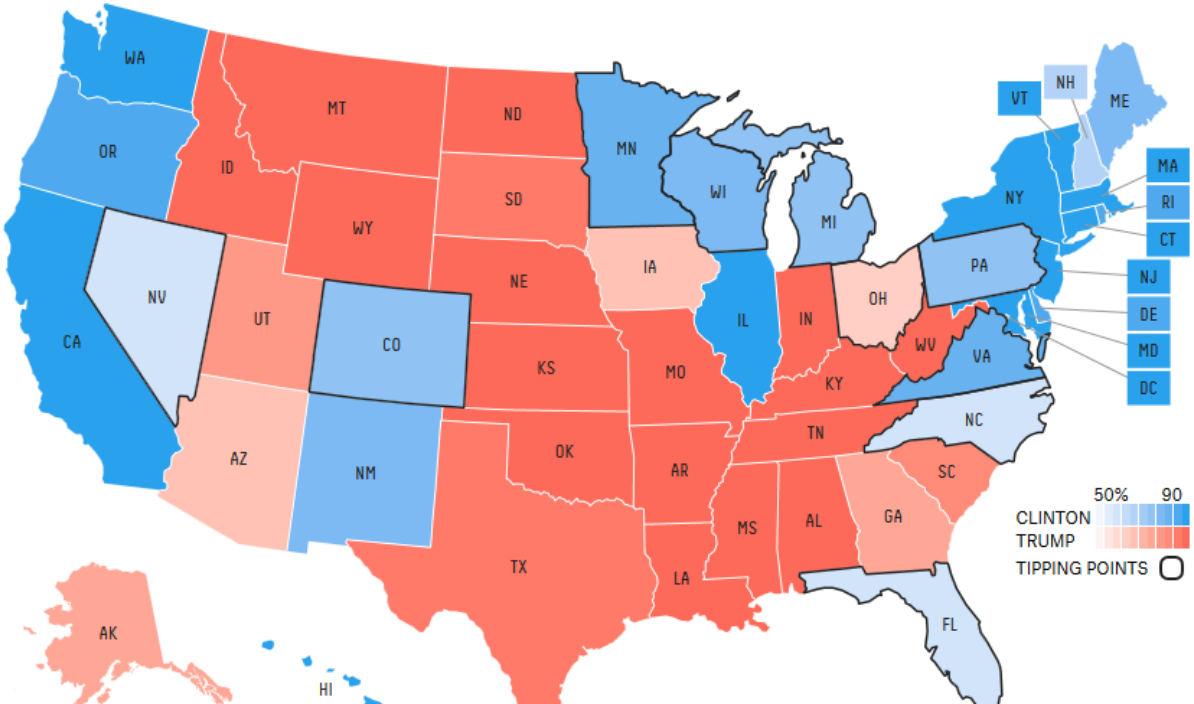
Est-ce la fin des sondages en 2016 ?

- Brexit
- Élection de Donald Trump
- Primaires de la droite en France

Ces "échecs" s'expliquent par des choix de méthode : ils ne remettent pas en cause la notion de sondages.

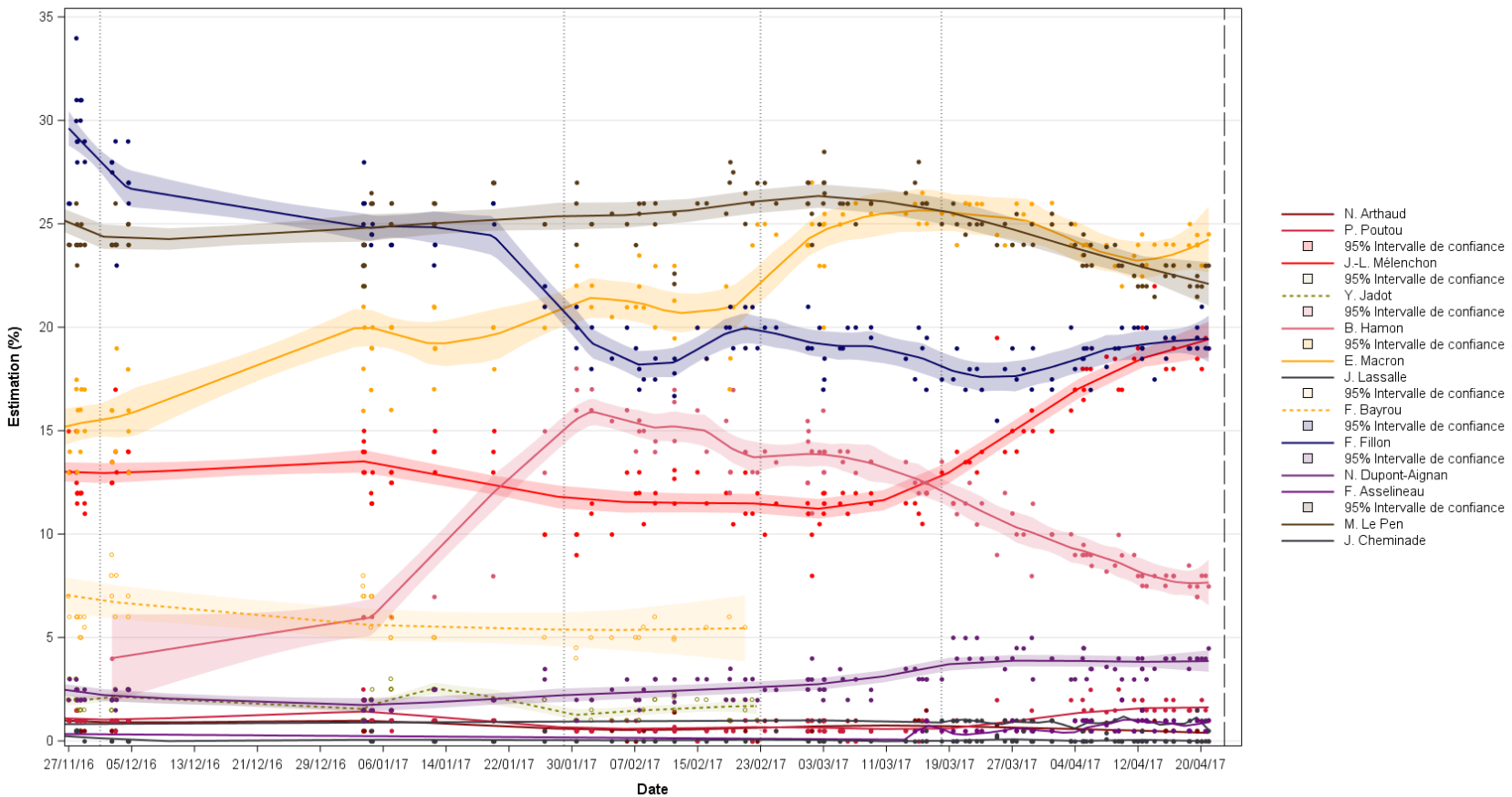
Élections américaines de 2016

Nate Silver, `http://fivethirtyeight.com` :



Un rebond en 2017

Les sondages avaient parfaitement prévu le score du premier tour des élections présidentielles de 2017 :



Partie 2

Utilisations

Statistique publique

- Enquêtes auprès des ménages : le moral des ménages, le taux de chômage
- Enquêtes auprès des entreprises - ESA (Enquête Sectorielle Annuelle) : Chiffre d'affaire par secteur, chiffres d'investissement, ...

Statistique publique

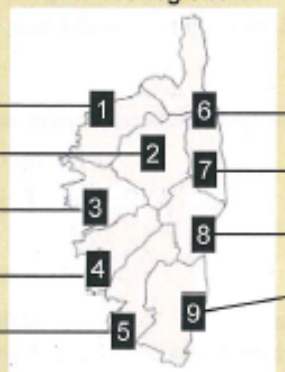
Et d'autres sujets. . .

17 Comment se répartissent vos nuitées dans ces différents modes d'hébergement *(sur 2 caractères)* ?

Mode d'hébergement	Nombre de nuits	Mode d'hébergement	Nombre de nuits
Chez la famille		Chez des amis	
Dans votre résidence secondaire		Location appartement, maison, ...	
Hôtel		Camping	
Résidence de tourisme		Village de vacances	
Chambre d'hôte		Gîte, meublé de tourisme ...	
Refuge		Bateau de plaisance	

18 Combien de nuitées avez-vous passées dans ces régions ?

	Région	Nb. de nuit
1	Balagne, Calvi, Île-Rousse, Galeria...	
2	Corte, Restonica, Niolu...	
3	Cargèse, Sagone, Porto, Piana...	
4	Ajaccio, Porticcio Pays ajaccien...	
5	Sartène, Propriano, Taravo...	



	Région	Nb. de nuit
6	Bastia, Saint-Florent, Cap-Corse, Patrimonio...	
7	Castagniccia, Casinca, Orezza, Costa Verde...	
8	Côte Orientale, Ghisonaccia, Aleria...	
9	Porto-Vecchio, Bonifacio Alta-Rocca...	

Autres exemples

- Biologie : dénombrement d'espèces
- Politique
- Marketing

Partie 3

Pourquoi faire une enquête ?

Conception

Une enquête peut être coûteuse (en budget - 2 millions pour une enquête INSEE, mais aussi en temps des enquêtés). Il faut donc s'assurer que le sujet est :

- Pertinent (contraintes européennes, demandes d'études, sujet actuel)
- Non couvert (autres enquêtes, autres données)
- Réalisable (pas trop complexe, légalité, anonymisation)

Données administratives

Pourquoi ne pas utiliser les données des impôts pour estimer les revenus ?

- Différences de concept
- Revenus non déclarés
- Peu d'information complémentaire

Autre exemple : mesures d'audiences et Box.

Questionnaire

Une fois les objectifs identifiés, il faut réaliser un questionnaire :

- Qui colle aux concepts
- Mais compréhensible par l'enquêté : ni équivoque, ni flou
- Qui permette de la comparabilité avec d'autres sources

Questionnaire

Ce n'est pas une science exacte !

- Questions ouvertes ou fermées ?
- Quelles modalités de réponse ?
- Quel est l'ordre des questions ?

⇒ D. Verger, "Rédiger un bon questionnaire, une variante de la quadrature du cercle ?"
(`https://www.epsilon.insee.fr/jspui/handle/1/8488`)

Partie 4

Un échantillon "représentatif" ?

Un concept erroné

Un "échantillon représentatif" :

- On entend souvent cette formule
- Quel est son sens ? "Village" de 100 habitants
- Est-ce pertinent ? Si on veut connaître la production automobile en France, quelle est la bonne stratégie ?

"Sondage" devrait toujours aller de pair avec **"objectif"** (même si les objectifs pour un même échantillon peuvent être nombreux).

L'estimation naïve

Pour l'estimation du total et de la moyenne d'une variable Y, l'estimateur « naïf » est :

- Pour le total, la somme des valeurs Y des individus de l'échantillon.
- Pour la moyenne, la moyenne des valeurs Y des individus de l'échantillon.

En général, l'estimation naïve est fausse (*biaisée*), surtout quand l'échantillon est choisi de façon complexe.

Exemple d'estimation naïve

Un exemple : étude du temps quotidien passé sur Internet :

Père			15 minutes
Mère			30 minutes
Enfant 1			215 minutes
Enfant 2			240 minutes

Vraie moyenne : 125 minutes.

Exemple d'estimation naïve

On interroge les deux parents, et un des enfants au hasard.

Père	Dans l'échantillon		15 minutes
Mère	Dans l'échantillon		30 minutes
Enfant 1	Dans l'échantillon		215 minutes
Enfant 2	/	/	? minutes

Estimateur naïf = ...

Exemple d'estimation naïve

On interroge les deux parents, et un des enfants au hasard.

Père	Dans l'échantillon		15 minutes
Mère	Dans l'échantillon		30 minutes
Enfant 1	Dans l'échantillon		215 minutes
Enfant 2	/	/	? minutes

Estimateur naïf : $(15 + 30 + 215) \,/\, 3 \approx 87$ minutes

Exemple d'estimation naïve

On interroge les deux parents, et un des enfants au hasard.

Père	Dans l'échantillon		15 minutes
Mère	Dans l'échantillon		30 minutes
Enfant 1	/	/	? minutes
Enfant 2	Dans l'échantillon		240 minutes

Estimateur naïf = ...

Exemple d'estimation naïve

On interroge les deux parents, et un des enfants au hasard.

Père	Dans l'échantillon		15 minutes
Mère	Dans l'échantillon		30 minutes
Enfant 1	/	/	? minutes
Enfant 2	Dans l'échantillon		240 minutes

Estimateur naïf : $(15 + 30 + 240) \ / \ 3 = 95$ minutes

Partie 5

Pondération

Pondérer ?

Pour éviter d'utiliser l'estimateur naïf, on utilise généralement ce qu'on appelle des poids, qu'on note w (pour *weight* en anglais).

Le poids d'un individu correspond au nombre d'individus que l'individu de l'échantillon représente dans la population. Si l'on interroge 1 individu sur 100, le poids est alors de 100.

L'estimateur pondéré du total est alors la somme des $w_i y_i$ sur l'échantillon.

Retour sur l'exemple

Retour sur l'exemple du temps quotidien passé sur Internet :

Père			15 minutes
Mère			30 minutes
Enfant 1			215 minutes
Enfant 2			240 minutes

Vraie moyenne : 125 minutes.

Retour sur l'exemple

On interroge les deux parents, et un des enfants au hasard.

Père	Dans l'échantillon	Poids $= 1$	15 minutes
Mère	Dans l'échantillon	Poids $= 1$	30 minutes
Enfant 1	Dans l'échantillon	Poids $= 2$	215 minutes
Enfant 2	/	/	? minutes

Estimateur naïf : $(15 + 30 + 215) \,/\, 3 \approx 87$ minutes
Estimateur pondéré : . . .

Retour sur l'exemple

On interroge les deux parents, et un des enfants au hasard.

Père	Dans l'échantillon	Poids = 1	15 minutes
Mère	Dans l'échantillon	Poids = 1	30 minutes
Enfant 1	Dans l'échantillon	Poids = 2	215 minutes
Enfant 2	/	/	? minutes

Estimateur naïf : (15 + 30 + 215) / 3 $\approx$ 87 minutes
Estimateur pondéré : (15 + 30 + 2*215) / 4 = 118,75 minutes

Retour sur l'exemple

On interroge les deux parents, et un des enfants au hasard.

Père	Dans l'échantillon	Poids = 1	15 minutes
Mère	Dans l'échantillon	Poids = 1	30 minutes
Enfant 1	/	/	? minutes
Enfant 2	Dans l'échantillon	Poids = 2	240 minutes

Estimateur naïf : (15 + 30 + 240) / 3 = 95 minutes
Estimateur pondéré : (15 + 30 + 2*240) / 4 = 131,25 minutes

À retenir

- On construit notre sondage et donc notre échantillon dans un but précis.
- On utilise les résultats obtenus en se rappelant de notre méthode de sondage.

Chapitre 2

Notion de base de sondage et d'erreur de sondage

Partie 1

Base de sondage

Propriétés de la base parfaite

Une base de sondage parfaite :

1. permet d'identifier les individus de façon non ambiguë
2. est exhaustive (on parle sinon de défaut de couverture)
3. est sans double compte
4. contient de l'information auxiliaire (voir cours suivants)

Défauts potentiels d'une base de sondages

Défauts potentiels d'une base de sondage :

- Sous-couverture
- Sur-couverture
- Répétition
- Classification erronée

Exemples

On veut mesurer la taille moyenne des français. Les bases suivantes sont-elles idéales ?

- L'annuaire
- Les listes électorales

Partie 2

Erreur de sondage

Erreur d'échantillonnage

On étudie seulement une partie de la population : différence entre la vraie valeur dans la population et la valeur estimée à l'aide de l'échantillon.

Facteurs :

- Taille de l'échantillon
- Variabilité du paramètre d'intérêt
- Plan d'échantillonnage
- Estimateur utilisé

Erreur de mesure / d'observation

La valeur recueillie est différente de la vraie valeur attachée à l'individu k.

- Erreur de l'enquêté (mémoire)
- Formulation de la question
- Influence de l'enquêteur
- Erreur de codification ou de saisie

Erreur due à la non-réponse

Non-réponse totale : Refus total de réponse ou absence

Non-réponse partielle : Refus / absence de réponse à certaines questions

Autres

Erreur de la base de sondage. En cas de défaut de couverture, biais de l'estimateur non mesurable.

Partie 3

Plan de sondage

Notations - Définitions

- Population $\mathcal{U} = \{u_1, ..., u_k, ..., u_N\}$
- L'individu $u_k \in \mathcal{U}$ est repéré sans ambiguïté par son identifiant k.
- Variable d'intérêt Y, qui prend la valeur y_k pour l'individu k
- Objectif du sondage : Mesurer $\Phi(Y)$, une fonction dépendant de Y.

Notations - Définitions

Y peut être

- quantitative (exemple : revenu). Dans ce cas Φ peut être le total, la moyenne, etc.
- qualitative, c'est-à-dire prendre un nombre fini de valeurs (exemple : sexe). Dans ce cas, Φ peut être la répartition dans la population.

Notations - Définitions

- Échantillon $s \subset \mathcal{U}$
- Si $s = \mathcal{U}$, recensement
- Chaque individu $u_k, k \in s$ est interrogé, et on relève y_k
- Les $y_k, k \in s$ seront utilisés pour construire un **estimateur** $\hat{\Phi}$ de Φ (voir partie 3)
- Les **unités d'échantillonnage** peuvent ne pas être les individus de la population eux-mêmes (proxy)

Notations - Définitions

La **base de sondage** donne les moyens d'identifier et de joindre les unités d'échantillonnage.

Plan de sondage sans remise - définition

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{U}$.
Le plan de sondage p est une loi de probabilité sur $\mathcal{S}$ telle que :

$$\forall s \in \mathcal{S},\ p(s) \geq 0$$

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} p(s) = 1$$

Plan de sondage sans remise - exemple

Soit $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$. On a alors :
$\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

On peut définir un plan de sondage p par :

$$p(\{1\}) = 0 \quad p(\{1, 2\}) = \frac{1}{2} \quad p(\{1, 2, 3\}) = 0$$

$$p(\{2\}) = 0 \quad p(\{1, 3\}) = \frac{1}{3}$$

$$p(\{3\}) = 0 \quad p(\{2, 3\}) = \frac{1}{6}$$

Plan de sondage avec remise - définition

On note $\tilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des échantillons avec remise ordonnés de $\mathcal{U}$.
$\tilde{\mathcal{S}}$ est de cardinal **infini**.

Plan de sondage avec remise - définition

Le plan de sondage avec remise $\tilde{p}$ est une loi de probabilité sur $\tilde{\mathcal{S}}$ tel que :

$$\forall \tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}},\ \tilde{p}(\tilde{s}) \geq 0$$

$$\sum_{\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}} \tilde{p}(\tilde{s}) = 1$$

Plan de sondage avec remise - exemple

$$\tilde{p}(\{1\}) = 0 \quad \tilde{p}(\{1,2\}) = \frac{1}{3} \quad \tilde{p}(\{1,1\}) = \frac{1}{6}$$

$$\tilde{p}(\{2\}) = 0 \quad \tilde{p}(\{1,3\}) = \frac{1}{6} \quad \tilde{p}(\{2,2\}) = \frac{1}{12}$$

$$\tilde{p}(\{3\}) = 0 \quad \tilde{p}(\{2,3\}) = \frac{1}{12} \quad \tilde{p}(\{3,3\}) = \frac{1}{6}$$

Plans avec remise

Dans ce cours, on s'intéresse principalement aux plans de sondages sans remise.

Chapitre 3

Notion d'estimateur

Partie 1

Définitions

Paramètre d'intérêt

Retour sur la slide 49. Y est la **variable d'intérêt** et $\Phi(Y)$ est le **paramètre d'intérêt**.

Attention, Y n'est **pas aléatoire** !

Estimateur

Une fois l'échantillon s tiré, on **estime** $\Phi(Y)$ à l'aide d'une fonction, notée $\hat{\Phi}(s)$, qui dépend de l'échantillon.

$\hat{\Phi}(s)$ est appelé un **estimateur** de $\Phi(Y)$.

Espérance

$$\mathbb{E}(\hat{\Phi}) = \sum_{s} p(s) \cdot \hat{\Phi}(s)$$

C'est la valeur moyenne de $\hat{\Phi}$ obtenue avec le plan de sondage considéré **sur tous les échantillons possibles**.

Biais

$$B(\hat{\Phi}) = \mathbb{E}(\hat{\Phi}) - \Phi$$

Si $B(\hat{\Phi}) = 0$, alors on parle **d'estimateur sans biais**.

Variance / Précision

$$\mathrm{Var}(\hat{\Phi}) = \sum_{\mathrm{s}} \mathrm{p(s)} \cdot \left[\mathbb{E}(\hat{\Phi}) - \hat{\Phi}(\mathrm{s})\right]^2$$

C'est une mesure de la dispersion des valeurs $\hat{\Phi}(s)$ autour de leur moyenne.

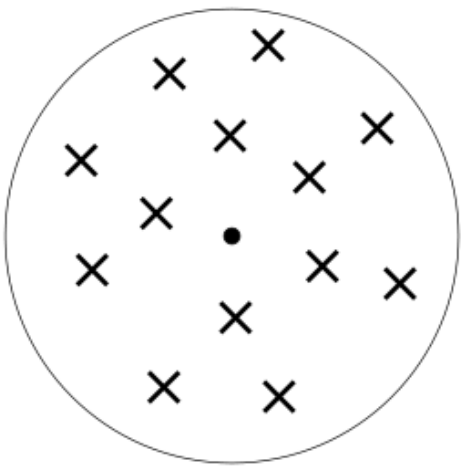
Variance / Précision

Quantités liées :

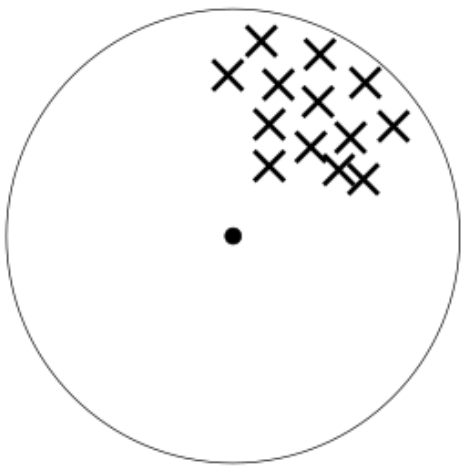
$$\sigma(\hat{\Phi}) = \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\Phi})}, \text{écart-type}$$

$$CV(\hat{\Phi}) = \frac{\sigma(\hat{\Phi})}{\mathbb{E}(\hat{\Phi})}, \text{coefficient de variation}$$

Schéma



Cas 1



Cas 2

Cas 3

Erreur quadratique moyenne

$$EQM(\hat{\Phi}) = \sum_s p(s) \cdot \left[\Phi - \hat{\Phi}(s)\right]^2$$
$$= \mathrm{Var}(\hat{\Phi}) + \mathrm{B}(\hat{\Phi})^2$$

Entre deux estimateurs sans biais, celui qui a la plus petite variance est de meilleure qualité.

Construction d'un intervalle de confiance

La **vraie variance** $\mathrm{Var}(\hat{\Phi})$ n'est pas connue (il faudrait pour cela pouvoir tirer tous les échantillons).

Il faudra donc estimer la variance à partir des données de l'échantillon. L'estimateur sera noté $\hat{V}(\hat{\Phi})$ ou $\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\Phi})$.

Construction d'un intervalle de confiance

Estimateurs des quantités liées à la variance :

$$\hat{\sigma}(\hat{\Phi}) = \sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\Phi})}, \text{écart-type}$$

$$\hat{CV}(\hat{\Phi}) = \frac{\hat{\sigma}(\hat{\Phi})}{\hat{\Phi}}, \text{coefficient de variation}$$

Construction d'un intervalle de confiance

On fait **l'hypothèse** : $\hat{\Phi}(s) \sim \mathcal{N}(\Phi, \mathrm{Var}(\Phi))$

L'intervalle de confiance à 95% est défini par :

$$IC_{95\%} = \left[\hat{\Phi} - 2\sigma(\hat{\Phi}); \hat{\Phi} + 2\sigma(\hat{\Phi})\right]$$

L'intervalle de confiance **estimé** est défini par :

$$\hat{IC}_{95\%} = \left[\hat{\Phi} - 2\hat{\sigma}(\hat{\Phi}); \hat{\Phi} + 2\hat{\sigma}(\hat{\Phi})\right]$$

Partie 2

Pondération et probabilités d'inclusion

L'estimateur naïf

Rappel : pour l'estimation du total et de la moyenne d'une variable Y, l'estimateur « naïf » s'écrit :

$$\hat{T}(Y)_{naif} = \sum_{k \in s} y_k$$

$$\hat{\bar{y}}_{naif} = \frac{1}{n} \sum_{k \in s} y_k$$

L'estimateur naïf

En général, l'estimation naïve est biaisée :

$$\mathbb{E}(\hat{\Phi}_{naif}) = \sum_{s} p(s) \cdot \hat{\Phi}(s)$$
$$\neq \Phi$$

$\mathbb{E}(\hat{\Phi})$ est la valeur moyenne de $\hat{\Phi}$ obtenue avec le plan de sondage considéré **sur tous les échantillons possibles**.

Probabilités d'inclusion π_k et π_{kl}

Pour résoudre le problème de biais, on doit utiliser une pondération adaptée à l'échantillon. L'outil à mobiliser : les **probabilités d'inclusion** de premier et de second degré : pour $k \in \mathcal{U}$,

$$\pi_k = \mathbb{P}(k \in s) = \mathbb{P}(\delta_k = 1) = \sum_{s \ni k} p(s)$$

$$\pi_{kl} = \mathbb{P}(k, l \in s) = \mathbb{P}(\delta_k \delta_l = 1) = \sum_{s \ni k,l} p(s)$$

(où δ_k est l'indicatrice d'appartenance de k à $\mathcal{S}$, appelée aussi variable de Cornfield)

Probabilités d'inclusion π_k et π_{kl} - Propriétés

On note $\Delta_{kl} = \pi_{kl} - \pi_k \pi_l$.

$$\mathbb{E}(\delta_k) = \pi_k \qquad \mathbb{E}(\delta_k \delta_l) = \pi_{kl}$$

$$\mathrm{Var}(\delta_\mathrm{k}) = \pi_\mathrm{k}(1 - \pi_\mathrm{k}) \qquad \mathrm{Cov}(\delta_\mathrm{k}\delta_\mathrm{l}) = \Delta_\mathrm{kl}$$

Probabilités d'inclusion π_k et π_{kl} - Propriétés

Pour un plan à **taille fixe** n, on a :

$$\sum_{k \in \mathcal{U}} \pi_k = n$$

$$\sum_{\substack{k,l \in \mathcal{U} \\ k \neq l}} \sum \pi_{kl} = n(n-1)$$

$$\sum_{\substack{l \in \mathcal{U} \\ l \neq k}} \pi_{kl} = \pi_k (n-1)$$

Partie 3

L'estimateur d'Horvitz-Thompson

Définition

Définition

L'estimateur d'Horvitz-Thompson (ou π-estimateur) est défini :

$$\textit{pour un total : } \hat{T}_{y\pi} = \sum_{k \in s} \frac{y_k}{\pi_k}$$

$$\textit{pour une moyenne : } \hat{\bar{y}}_{\pi} = \frac{1}{N} \sum_{k \in s} \frac{y_k}{\pi_k}$$

C'est donc un **estimateur pondéré** *utilisant les poids* $w_k = \dfrac{1}{\pi_k}$

Estimation sans biais

Theorem

Si $\forall k \in \mathcal{U}, \pi_k > 0$, *alors l'estimateur d'Horvitz-Thompson est* **sans biais** *pour le total et la moyenne.*

La condition signifie que toutes les unités de la population ont une chance non nulle d'être dans l'échantillon.

Estimation sans biais

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{T}_{y\pi}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k\in s}\frac{y_k}{\pi_k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k\in \mathcal{U}}\frac{y_k\delta_k}{\pi_k}\right] \\
&= \sum_{k\in \mathcal{U}}\frac{y_k\mathbb{E}[\delta_k]}{\pi_k} \\
&= \sum_{k\in \mathcal{U}} y_k \\
&= T(y)
\end{aligned}$$

Rappel : Variance / Précision

$$\mathrm{Var}(\hat{\Phi}) = \sum_{\mathrm{s}} \mathrm{p}(\mathrm{s}) \cdot \left[\mathbb{E}(\hat{\Phi}) - \hat{\Phi}(\mathrm{s})\right]^2$$

C'est une mesure de la dispersion des valeurs $\hat{\Phi}(s)$ autour de leur moyenne.

Variance de l'estimateur de Horvitz-Thompson

Propriété

La variance de l'estimateur de Horvitz-Thompson s'écrit :

$$\mathrm{Var}[\hat{\mathrm{T}}_{y\pi}] = \sum_{k\in\mathcal{U}} \sum_{l\in\mathcal{U}} \frac{y_k y_l}{\pi_k \pi_l} \Delta_{kl}$$

(où : $\Delta_{kl} = \pi_{kl} - \pi_k \pi_l$*)*

Variance de l'estimateur de Horvitz-Thompson

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mathrm{t}}_{\mathrm{y}\pi}) &= \mathrm{Var}\Big(\sum_{\mathrm{k}\in\mathrm{U}} \frac{\mathrm{y_k}}{\pi_\mathrm{k}}\delta_\mathrm{k}\Big) \\
&= \sum_{k\in U} \frac{y_k^2}{\pi_k^2}\mathrm{Var}(\delta_\mathrm{k}) + \sum_{\mathrm{k}\in\mathrm{U}} \sum_{\mathrm{l}\in\mathrm{U},\mathrm{l}\neq\mathrm{k}} \frac{\mathrm{y_k}}{\pi_\mathrm{k}}\frac{\mathrm{y_l}}{\pi_\mathrm{l}}\mathrm{Cov}(\delta_\mathrm{k},\delta_\mathrm{l}) \\
&= \sum_{k\in U} \frac{y_k^2}{\pi_k^2}\pi_k\cdot(1-\pi_k) + \sum_{k\in U} \sum_{l\in U,l\neq k} \frac{y_k}{\pi_k}\frac{y_l}{\pi_l}(\pi_{kl}-\pi_k\pi_l) \\
&= \sum_{k,l\in U} \frac{y_k}{\pi_k}\frac{y_l}{\pi_l}\Delta_{kl}
\end{aligned}$$

Variance pour un plan de taille fixe

Propriété

Si le plan de sondage est de taille fixe (formule de Yates-Grundy) :

$$\mathrm{Var}(\hat{\mathrm{t}}_{\mathrm{y}\pi}) = -\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{k}\in\mathrm{U}}\sum_{\mathrm{l}\in\mathrm{U},\mathrm{l}\neq\mathrm{k}}\left(\frac{\mathrm{y_k}}{\pi_\mathrm{k}} - \frac{\mathrm{y_l}}{\pi_\mathrm{l}}\right)^2\Delta_{\mathrm{kl}}$$

Variance de l'estimateur de Horvitz-Thompson

Démonstration.

Découle de la formule de Horwitz-Thompson quand le plan de sondage est de taille fixe. Pour démontrer la formule, il vaut mieux procéder à rebours :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{k\in U}\sum_{l\in U,l\neq k}\left(\frac{y_k}{\pi_k}-\frac{y_l}{\pi_l}\right)^2\Delta_{kl}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k\in U}\sum_{l\in U,l\neq k}\left(\frac{y_k}{\pi_k}-\frac{y_l}{\pi_l}\right)^2(\pi_k\pi_l-\pi_{kl})\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k\in U}\sum_{l\in U,l\neq k}\left(\frac{y_k^2}{\pi_k^2}+\frac{y_l^2}{\pi_l^2}-2\frac{y_k y_l}{\pi_k\pi_l}\right)(\pi_k\pi_l-\pi_{kl})\\
&=\sum_{k\in U}\sum_{l\in U,l\neq k}\frac{y_k^2}{\pi_k^2}(\pi_k\pi_l-\pi_{kl})-\sum_{k\in U}\sum_{l\in U,l\neq k}y_k y_l\left(1-\frac{\pi_{kl}}{\pi_k\pi_l}\right)\\
&=\sum_{k\in U}\frac{y_k^2}{\pi_k}\left(\sum_{l\in U,l\neq k}\pi_l-\frac{1}{\pi_k}\frac{y_k^2}{\pi_k}\pi_{kl}\right)-\sum_{k\in U}\sum_{l\in U,l\neq k}y_k y_l\left(1-\frac{\pi_{kl}}{\pi_k\pi_l}\right)
\end{aligned}
$$

Variance de l'estimateur de Horvitz-Thompson

Démonstration.

...

Or, d'après le cours 1, on a dans le cas taille fixe : $\sum_{k\in U}\pi_k = n$ et $\sum_{l\in U, l\neq k}\pi_{kl} = \pi_k(n-1)$, cela donne :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{k\in U}\sum_{l\in U, l\neq k}\left(\frac{y_k}{\pi_k}-\frac{y_l}{\pi_l}\right)^2\Delta_{kl}\\
&=\sum_{k\in U}\frac{y_k^2}{\pi_k}\left(n-\pi_k-\frac{\pi_k(n-1)}{\pi_k}\right)-\sum_{k\in U}\sum_{l\in U, l\neq k}y_k y_l\left(1-\frac{\pi_{kl}}{\pi_k\pi_l}\right)\\
&=\sum_{k\in U}\frac{y_k^2}{\pi_k^2}\pi_k(1-\pi_k)-\sum_{k\in U}\sum_{l\in U, l\neq k}\frac{y_k y_l}{\pi_k\pi_l}\left(\pi_k\pi_l-\pi_{kl}\right)\\
&=\sum_{k,l\in U}\frac{y_k}{\pi_k}\frac{y_l}{\pi_l}\Delta_{kl}
\end{aligned}
$$

Et on retombe bien sur la formule d'Horvitz-Thompson. □

Estimation de variance

Les quantités précédentes sont les **vraies variances**. On peut utiliser les estimateurs suivants, qui sont sans biais dès lors que $\forall k, l, \pi_{kl} > 0$:

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{t}_{y\pi}) = \sum_{k \in s} \frac{y_k^2}{\pi_k^2}(1 - \pi_k) - \sum_{k \in s} \sum_{l \in s, l \neq k} \frac{y_k y_l}{\pi_k \pi_l \pi_{kl}}(\pi_k \pi_l - \pi_{kl})$$

Pour un plan de taille fixe :

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{t}_{y\pi}) = -\frac{1}{2} \sum_{k \in s} \sum_{l \in s, l \neq k} \left(\frac{y_k}{\pi_k} - \frac{y_l}{\pi_l} \right)^2 \frac{\pi_k \pi_l - \pi_{kl}}{\pi_{kl}}$$

Remarque

Remarque : si le plan de sondage ne vérifie pas :

$$\forall k \neq l \in \mathcal{U}, \pi_{kl} - \pi_k \pi_l \geq 0$$

(condition de Sen-Yates-Grundy), ces estimateurs de variance peuvent prendre des valeurs négatives.

Construction d'un intervalle de confiance

On fait **l'hypothèse** : $\hat{\Phi}(s) \sim \mathcal{N}(\Phi, \mathrm{Var}(\Phi))$

L'intervalle de confiance à 95% est défini par :

$$IC_{95\%} = \left[\hat{\Phi} - 2\sigma(\hat{\Phi}); \hat{\Phi} + 2\sigma(\hat{\Phi})\right]$$

L'intervalle de confiance **estimé** est défini par :

$$\hat{IC}_{95\%} = \left[\hat{\Phi} - 2\hat{\sigma}(\hat{\Phi}); \hat{\Phi} + 2\hat{\sigma}(\hat{\Phi})\right]$$

Construction d'un intervalle de confiance

Pour l'estimateur de variance de l'estimateur d'Horvitz-Thompson pour un plan à taille fixe, cela revient à calculer :

La borne inférieure de l'intervalle de confiance

$$\sum_{k \in s} \frac{y_k}{\pi_k} - 2\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k \in s}\sum_{l \in s, l \neq k}\left(\frac{y_k}{\pi_k} - \frac{y_l}{\pi_l}\right)^2\left(1 - \frac{\pi_k \pi_l}{\pi_{kl}}\right)}$$

et la borne supérieure de l'intervalle de confiance

$$\sum_{k \in s} \frac{y_k}{\pi_k} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k \in s}\sum_{l \in s, l \neq k}\left(\frac{y_k}{\pi_k} - \frac{y_l}{\pi_l}\right)^2\left(1 - \frac{\pi_k \pi_l}{\pi_{kl}}\right)}$$

Partie 4

L'estimateur de Hájek

Définition

L'estimateur de Horvitz-Thompson de la moyenne nécessite la connaissance de N, la taille de la population. Si on ne la connaît pas, on peut utiliser dans ce cas l'estimateur de Hájek :

$$\hat{\bar{y}}_H = \frac{\sum_{k \in s} \frac{y_k}{\pi_k}}{\sum_{k \in s} \frac{1}{\pi_k}}$$

Propriété

L'estimateur de Hájek est biaisé, mais en général, le biais est négligeable.

Estimateur de Hájek du total

L'estimateur de Hájek peut être utilisé pour estimer un total :

$$T(\hat{Y})_H = N \cdot \frac{\sum_{k \in s} \frac{y_k}{\pi_k}}{\sum_{k \in s} \frac{1}{\pi_k}}$$

... mais cela impose de connaître N.

Partie 5

Recherche d'un estimateur optimal

Estimateur de Horvitz-Thompson

L'estimateur de Horvitz-Thompson constitue le fondement de l'estimation par sondage (même si d'autres estimateurs peuvent être utilisés, la logique de construction découle souvent de celle de Horvitz-Thompson, voir cours suivants)

Estimateur de Horvitz-Thompson

L'estimateur de Horvitz-Thompson n'est pas le seul estimateur sans biais.

Recherche d'optimalité

Existe-t-il un estimateur optimal en sondages ?

Question centrale pour les théoriciens des sondages dans les années 1950 à 1970 : Godambe, Hanurav, Basu, etc.

Difficile à répondre car cela dépend de la population, de la taille d'échantillon, des concepts mesurés...